

## OPCIÓN A

**A.1.-a)** (1'25 puntos) Estudiar para que valores de  $\alpha$  el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \alpha + 1 & -1 & \alpha - 2 \\ -1 & \alpha + 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ tiene rango máximo}$$

b) (1'25 puntos) Siendo  $\mathbf{A}^{-1}$  la inversa de la matriz  $\mathbf{A}$ , calcular  $(\mathbf{A}^{-1})^2$  para  $\alpha = -1$

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \alpha + 1 & -1 & \alpha - 2 \\ -1 & \alpha + 1 & 2 \end{vmatrix} = -(\alpha - 2) + 2 \cdot (\alpha + 1)^2 - 2 - 2 \cdot (\alpha + 1) = -\alpha + 2 + 2\alpha^2 + 4\alpha + 2 - 2 - 2\alpha - 2$$

$$|A| = 2\alpha^2 + \alpha \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow 2\alpha^2 + \alpha = 0 \Rightarrow (2\alpha + 1)\alpha = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ 2\alpha + 1 = 0 \Rightarrow 2\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$(\text{Para todo}) \forall \alpha \in \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{2}, 0 \right\} \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 \quad (\text{Máximo rango})$$

b)

$$|A| = 2 \cdot (-1)^2 + (-1) = 2 - 1 = 1 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (\text{adj } A^t) \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{adj } A^t = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$(A^{-1})^2 = A^{-2} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A.2.- a) (1'75 puntos) Utilizar el cambio de variable  $t^6 = 1 + x$  para calcular

$$\int \frac{\sqrt{x+1} + 2}{(x+1)^{\frac{2}{3}} - \sqrt{x+1}} dx$$

b) (0'75 puntos) Para  $f(x) = e^{-3x}$  calcular sus derivadas sucesivas y concluir cual de las siguientes opciones es la correcta:

- i)  $f^{(n)} = 3^n e^{-3x}$       ii)  $f^{(n)} = -3^{(n+1)} e^{-3x}$       iii)  $f^{(n)} = (-3)^n e^{-3x}$

a)

$$I = \int \frac{\sqrt{x+1} + 2}{(x+1)^{\frac{2}{3}} - \sqrt{x+1}} dx = \int \frac{t^3 + 2}{t^4 - t^3} 6t^5 dt = 6 \int \frac{t^3 + 2}{(t-1)t^3} t^5 dt = 6 \int \frac{(t^3 + 2) \cdot t^2}{t-1} dt = 6 \int \frac{t^5 + t^2}{t-1} dt$$

$$x+1 = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5 dt \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} = \sqrt{t^6} = t^3 \\ (x+1)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(x+1)^2} = \sqrt[3]{(t^6)^2} = t^4 \end{cases}$$

$$\frac{t^5 + t^2}{-t^5 + t^4} \quad \frac{t-1}{t^4 + t^3 + t^2 + 2t + 2}$$

$$\frac{t^4 + t^2}{-t^4 + t^3}$$

$$\frac{t^3 + t^2}{-t^3 + t^2}$$

$$\frac{2t^2}{-2t^2 + 2t}$$

$$\frac{2t}{-2t + 2}$$

$$2$$

$$I = 6 \int (t^4 + t^3 + t^2 + 2t + 2) dt + 6 \int \frac{2}{t-1} dt = 6 \left( \frac{t^5}{5} + \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} + \frac{2t^2}{2} + 2t \right) + 12 \int \frac{du}{u}$$

$$t-1 = u \Rightarrow dt = du$$

$$I = 6 \left( \frac{\sqrt[6]{(x+1)^5}}{5} + \frac{\sqrt[6]{(x+1)^4}}{4} + \frac{\sqrt[6]{(x+1)^3}}{3} + \frac{2\sqrt[6]{(x+1)^2}}{2} + 2\sqrt[6]{x+1} \right) + 12 \cdot \ln u$$

$$I = 6 \left( \frac{\sqrt[6]{(x+1)^5}}{5} + \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}}{4} + \frac{\sqrt{x+1}}{3} + \sqrt[3]{x+1} + 2\sqrt[6]{x+1} + 2 \cdot \ln(\sqrt{x+1} - 1) \right) + K$$

b)  $y' = -3 \cdot e^{-3x}$        $y'' = (-3)^2 \cdot e^{-3x}$        $y''' = (-3)^3 \cdot e^{-3x}$        $y^{IV} = (-3)^4 \cdot e^{-3x}$

Por lo tanto la derivada es la opción iii)  $f^{(n)} = (-3)^n e^{-3x}$

**A.3.-** Sea la función  $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x - 2}$

- a) (0'5 puntos) Calcular su dominio  
 b) (1 punto) Obtener sus asíntotas  
 c) (1 punto) Estudiar sus puntos de corte con los ejes y analizar si es una función par

a)

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow f(2) = \frac{2^2 + 2}{2 - 2} = \frac{6}{0} \Rightarrow \text{Asíntota} \Rightarrow \text{Dom}(f) = (\text{Todo}) \forall x \in \mathbb{R} - \{2\}$$

b)

*Asíntota vertical*

$$x = 2 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{6}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{6}{0^+} = \infty \end{cases}$$

*Asíntotas horizontales*

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2}{x - 2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{2}{x^2}}{\frac{x}{x^2} - \frac{2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = \frac{1 + \frac{2}{\infty}}{\frac{1}{\infty} - \frac{2}{\infty}} = \frac{1 + 0}{0 - 0} = \frac{1}{0} = \infty \Rightarrow \text{Sin solución}$$

No existe asíntota horizontal cuando  $x \rightarrow \infty$

$$y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2}{-x - 2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{2}{x^2}}{\frac{x}{x^2} - \frac{2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = \frac{1 + \frac{2}{\infty}}{\frac{1}{\infty} - \frac{2}{\infty}} = \frac{1 + 0}{0 - 0} = \frac{1}{0} = \infty \Rightarrow \text{Sin solución}$$

No existe asíntota horizontal cuando  $x \rightarrow -\infty$

*Asíntotas oblicuas*

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 + 2}{x - 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2}{x(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} = \frac{1 + 0}{1 - 0} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 2}{x - 2} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2 - x^2 + 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x - 2} = \frac{4}{\infty} = 0$$

*Asíntota oblicua*  $y = x$  cuando  $x \rightarrow \infty$

**Continuación del problema A.3 de la opción A**

b) Continuación

Asíntotas oblicuas (Continuación)

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2}{x^2 + 2x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2}{x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{2}{x}} = \frac{1+0}{1+0} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2 + 2}{x - 2} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2 - x^2 + 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{-x - 2} = \frac{4}{\infty} = 0$$

Asíntota oblicua  $y = x$  cuando  $x \rightarrow -\infty$ 

c)

$$\text{Corte con los ejes} \begin{cases} OY \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{0^2 + 2}{0 - 2} = -1 \Rightarrow (0, -1) \\ OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 0 = \frac{x^2 + 2}{x - 2} \Rightarrow x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = -2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-2} \Rightarrow \text{No hay pun. con } OX \end{cases}$$

**A.4.- a)** (1'5 puntos) Halla la ecuación del plano paralelo a las rectas de ecuaciones:

$$r \equiv 2 - x = y = \frac{z+1}{2}, \quad s \equiv \begin{cases} 2x - y + z = -2 \\ -x + y + 3z = 1 \end{cases} \text{ y que pasa por el punto } \mathbf{A(1, 1, 2)}$$

b) (1 punto) Calcular el ángulo que forman los vectores  $\vec{u} = (2, 1, 1)$  y  $\vec{v} = (1, 1, 1)$ . Obtener su producto vectorial

a) El plano queda determinado por los vectores de las dos rectas y el vector generador que parte del punto A

$$\left\{ \begin{array}{l} r \equiv \frac{x-2}{-1} = y = \frac{z+1}{2} \Rightarrow \vec{v}_r = (-1, 1, 2) \\ s \Rightarrow x + 4z = -1 \Rightarrow x = -1 - 4z \Rightarrow 1 + 4z + y + 3z = 1 \Rightarrow y = -7z \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = -1 - 4\lambda \\ y = -7\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_s = (-4, -7, 1) \\ AG = (x, y, z) - (1, 1, 2) = (x-1, y-1, z-2) \end{array} \right.$$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -4 & -7 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x-1 - 8 \cdot (y-1) + 7 \cdot (z-2) + 4 \cdot (z-2) + 14 \cdot (x-1) + y-1 = 0 \Rightarrow$$

$$15 \cdot (x-1) - 7 \cdot (y-1) + 11 \cdot (z-2) = 0 \Rightarrow \pi \equiv 15x - 7y + 11z - 30 = 0$$

**Continuación del problema A.4 de la opción A**

$$\vec{u} = (2, 1, 1) \text{ y } \vec{v} = (1, 1, 1)$$

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|(2, 1, 1) \cdot (1, 1, 1)|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{|2 + 1 + 1|}{\sqrt{6} \sqrt{3}} = \frac{|4|}{\sqrt{18}} = \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow$$

$$\alpha = \arccos \left( \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) = 19^\circ 28' 16''$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} - \vec{k} - \vec{i} - 2\vec{j} = -\vec{j} + \vec{k} \Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = (0, -1, 1)$$

## OPCIÓN B

**B1.- a)** (1 punto) Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha \\ -\operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \operatorname{sen} \alpha \\ 0 & \beta & 0 \\ -\operatorname{sen} \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}. \text{ Estudiar los valores de } \alpha \text{ y } \beta \text{ que}$$

hacen que sea cierta la igualdad  $(\det(A))^2 - 2 \cdot \det(A) \cdot \det(B) + 1 = 0$

b) (1'5 puntos) Utilizar las propiedades de los determinantes para calcular el valor de

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & a+3 & b+4 \\ 2 & c+3 & d+4 \end{vmatrix} \text{ con } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

a)

$$\left\{ \begin{array}{l} |A| = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha \\ -\operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = \cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 \\ |B| = \begin{vmatrix} \cos \alpha & 0 & \operatorname{sen} \alpha \\ 0 & \beta & 0 \\ -\operatorname{sen} \alpha & 0 & \cos \alpha \end{vmatrix} = \beta \cos^2 \alpha + \beta \operatorname{sen}^2 \alpha = \beta (\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha) = \beta \end{array} \right. \Rightarrow 1 - 2 \cdot 1 \cdot \beta + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$2 - 2\beta = 0 \Rightarrow 2\beta = 2 \Rightarrow \beta = 1$$

b)

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & a & b+4 \\ 2 & c & d+4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & b+4 \\ 2 & 3 & d+4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & a & b+4 \\ 1 & c & d+4 \end{vmatrix} + 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & b+4 \\ 1 & 1 & d+4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & a & b+4 \\ 1 & c & d+4 \end{vmatrix} + 6 \cdot 0 \text{ (Dos col. igua}$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & a & b+4 \\ 1 & c & d+4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & a & b \\ 1 & c & d \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & a & 4 \\ 1 & c & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & a & b \\ 1 & c & d \end{vmatrix} + 2 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & a & b \\ 1 & c & d \end{vmatrix} + 8 \cdot 0 =$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & a-3 & b-4 \\ 0 & c-3 & d-4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} a-3 & b-4 \\ c-3 & d-4 \end{vmatrix} = 2 \cdot [(a-3) \cdot (d-4) - (c-3) \cdot (b-4)] =$$

$$= 2 \cdot [ad - 4a - 3d + 12 - (cb - 4c - 3b + 12)] = 2 \cdot (ad - 4a - 3d + 12 - cb + 4c + 3b - 12) =$$

$$= 2 \cdot (ad - cb - 4a + 3b + 4c - 3d)$$

**B.2.- a)** (1'25 puntos) Se considera la función  $f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } 0 < x < 1 \\ ax^2 + b & \text{si } 1 \leq x < +\infty \end{cases}$ . Si  $f(2) = 3$ , obtener los valores de  $a$  y  $b$  que hacen que  $f(x)$  sea continua

**b)** (1'25 puntos) Calcular  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log(x^2 - 9)$  y  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \log(x^2 - 9)$

a)

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \ln 1 = 0 \\ f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = a \cdot 1^2 + b = a + b \Rightarrow f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow a = -b \Rightarrow \\ f(2) = a \cdot 2^2 + b = 3 \Rightarrow 4a + b = 3 \end{array} \right.$$

$$-4b + b = 3 \Rightarrow -3b = 3 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } 0 < x < 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } 1 \leq x < +\infty \end{cases}$$

b)

$$x^2 - 9 > 0 \Rightarrow (x-3) \cdot (x+3) > 0 \Rightarrow \begin{cases} x-3 > 0 \Rightarrow x > 3 \\ x+3 > 0 \Rightarrow x > -3 \end{cases}$$

	$-\infty$	<b>-3</b>	<b>3</b>	$\infty$
<b>x &gt; -3</b>		(-)	(+)	(+)
<b>x &gt; 3</b>		(-)	(-)	(+)
<b>Solución</b>		(+)	(-)	(+)

$$Dom(f) = \forall x \in \mathbb{R} / (x < -3) \cup (x > 3) \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \log(x^2 - 9) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \log(x^2 - 9) = \log(3^2 - 9) = \log 0 = -\infty \end{cases}$$

**B.3.-** Sea  $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$

a) (0'5 puntos) Determinar su dominio

b) (1 punto) Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento

c) (1 punto) Analizar sus puntos de inflexión

a)

$$x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow f(1) = \frac{1^3}{(1-1)^2} = \frac{1}{0} \Rightarrow Dom(f) = \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$$

**Continuación del problema B.3 de la opción B**

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-1)^2 - 2(x-1)x^3}{(x-1)^4} = \frac{3x^2(x-1) - 2x^3}{(x-1)^3} = \frac{3x^3 - 3x^2 - 2x^3}{(x-1)^3} = \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} = \frac{(x-3)x^2}{(x-1)^3} \Rightarrow$$

$$\text{Crecimiento} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \frac{(x-3)x^2}{(x-1)^3} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \\ x-3 > 0 \Rightarrow x > 3 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} / x > 3 \\ (x-1)^3 > 0 \Rightarrow x-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} / x > 1 \end{cases}$$

$-\infty$	<b>1</b>	<b>3</b>	$\infty$
$x^2 > 0$	(+)	(+)	(+)
$x > 1$	(-)	(+)	(+)
$x > 3$	(-)	(-)	(+)
Solución	(+)	(-)	(+)

*Creciente*  $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} / (x < 1) \cup (x > 3)$

*Decreciente*  $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} / 1 < x < 3$

c)

$$f''(x) = \frac{(3x^2 - 6x) \cdot (x-1)^3 - 3(x-1)^2(x^3 - 3x^2)}{(x-1)^6} = \frac{(3x^2 - 6x) \cdot (x-1) - 3(x^3 - 3x^2)}{(x-1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{3x^3 - 6x^2 - 3x^2 + 6x - 3x^3 + 9x^2}{(x-1)^4} = \frac{6x}{(x-1)^4}$$

$$\text{Concavidad} \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow \begin{cases} 6 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \\ x > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} / x > 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{Concavidad} \Rightarrow x > 0 \\ \text{Convexidad} \Rightarrow x < 0 \end{cases} \\ (x-1)^4 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Punto de inflexión  $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{0^3}{(0-1)^2} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow (0, 0)$



B.4.- a) (1'5 puntos) Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos  $A(1, -2, 4)$ ,

$B(0, 3, 2)$ , y es paralelo a la recta  $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{2}$

b) (1 punto) En caso de que sea posible, escribir el vector  $\vec{v} = (1, 2, 4)$  como combinación lineal de los vectores  $\vec{a} = (1, 0, 1)$ ,  $\vec{b} = (1, 1, 0)$ ,  $\vec{c} = (0, 1, 1)$

a) El plano queda definido por los vectores AB, el vector de la recta y el vector genérico AG que forma los infinitos puntos del plano. Estos tres vectores, al ser coplanarios forman una matriz cuyo determinante es cero y la ecuación pedida.

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (4, 1, 2) \\ \vec{AB} = (0, 3, 2) - (1, -2, 4) = (-1, 5, -2) \\ \vec{AG} = (x, y, z) - (1, -2, 4) = (x-1, y+2, z-4) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-4 \\ 4 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-2 \cdot (x-1) - 2 \cdot (y+2) + 20 \cdot (z-4) + (z-4) - 10 \cdot (x-1) + 8 \cdot (y+2) = 0 \Rightarrow$$

$$-12 \cdot (x-1) + 6 \cdot (y+2) + 21 \cdot (z-4) = 0 \Rightarrow 4 \cdot (x-1) - 2 \cdot (y+2) - 7 \cdot (z-4) = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv 4x - 2y - 7z + 20 = 0$$

b)

Es combinación lineal de los otros tres, si estos, son vectores independientes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Son vectores independientes y forman base}$$

$$(1, 2, 4) = a(1, 0, 1) + b(1, 1, 0) + c(0, 1, 1) \Rightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ b + c = 2 \\ a + c = 4 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow 2c = 3 \Rightarrow c = \frac{3}{2} \Rightarrow b - \frac{3}{2} = 1 \Rightarrow b = \frac{5}{2} \Rightarrow a + \frac{3}{2} = 1 \Rightarrow$$

$$a = -\frac{1}{2} \Rightarrow (1, 2, 4) = -\frac{1}{2} \cdot (1, 0, 1) + \frac{5}{2} \cdot (1, 1, 0) + \frac{3}{2} \cdot (0, 1, 1)$$